第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

42　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した曲線は $y=f(x-\alpha)+\beta$ となることを示せ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ を直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=f(2p-x)$ となることを示せ．また，曲線 $y=f(x)$ を点 $(p,\ q)$ に関して対称移動した曲線は $y=-f(2p-x)+2q$ となることを示せ．

(3)　偶関数と奇関数の積は奇関数になることを示せ．また，奇関数と奇関数の積は偶関数になることを示せ．

(4)　4 次関数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$（a，b，c，d，e は実数の定数）に関して，$y=f(x)$ が直線 $x=p$ に関して対称なグラフをもつとするとき，2 つの 2 次関数 $g(x)$ と $h(x)$ を用いて $f(x)=g(h(x))$ と表せることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

42　曲線 $y=f(x)$ を直線 $y=x+1$ に関して対称移動した曲線の方程式を求めよ.

【選択肢】

㋐　$x+1=f(y+1)$　㋑　$x+1=f(y-1)$　㋒　$x-1=f(y-1)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第42講　偶関数，奇関数，対称移動

42　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した曲線は $y=f(x-\alpha)+\beta$ となることを示せ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ を直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=f(2p-x)$ となることを示せ．また，曲線 $y=f(x)$ を点 $(p,\ q)$ に関して対称移動した曲線は $y=-f(2p-x)+2q$ となることを示せ．

(3)　偶関数と奇関数の積は奇関数になることを示せ．また，奇関数と奇関数の積は偶関数になることを示せ．

(4)　4次関数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$（a，b，c，d，e は実数の定数）に関して，$y=f(x)$ が直線 $x=p$ に関して対称なグラフをもつとするとき，2つの2次関数 $g(x)$ と $h(x)$ を用いて $f(x)=g(h(x))$ と表せることを示せ．

【答】　略

【解答】

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ を x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$x+\alpha=X,\ y+\beta=Y$$

が成り立つ．ここで $(x,\ y)=(X-\alpha,\ Y-\beta)$ を $y=f(x)$ に代入すると

$$Y-\beta=f(X-\alpha)$$
$$Y=f(X-\alpha)+\beta$$

となる．よって $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ平行移動した曲線は $y=f(x-\alpha)+\beta$ となる．

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ を直線 $x=p$ に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$\frac{x+X}{2}=p,\ y=Y$$

が成り立つ．ここで $(x,\ y)=(2p-X,\ Y)$ を $y=f(x)$ に代入すると

$$Y=f(2p-X)$$

となる．よって $y=f(x)$ のグラフを直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=f(2p-x)$ となる．

　また曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ を点 $(p,\ q)$ に関して対称移動した点を $(X,\ Y)$ とすると

$$\frac{x+X}{2}=p, \frac{y+Y}{2}=q$$

が成り立つ．ここで $(x,\ y)=(2p-X,\ 2q-Y)$ を $y=f(x)$ に代入すると

$$2q-Y=f(2p-X)$$

となる．よって $y=f(x)$ のグラフを直線 $x=p$ に関して対称移動した曲線は $y=-f(2p-x)+2q$ となる．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$f(x)$ を偶関数，$g(x)$ を奇関数とし，$h(x)=f(x)g(x)$ と定める．このとき，
$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$ であり

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)\{-g(x)\}=-f(x)g(x)=-h(x)$$

より $h(x)$ は奇関数となる．

またf $f(x)$ と $g(x)$ を奇関数とし，$h(x)=f(x)g(x)$ と定めると，
$f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=-g(x)$ であり

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)\{-g(x)\}=f(x)g(x)=h(x)$$

より $h(x)$ は偶関数となる．

(4)　$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-p)^4+b'(x-p)^3+c'(x-p)^2+d'(x-p)+e'$ と表せる．ただし，$b'=4ap+b$，$c'=6ap^2+3bp+c$，$d'=4ap^3+3bp^2+2cp+d$，$e'=ap^4+bp^3+cp^2+dp+e$ である．

このとき曲線 $y=f(x)$ が直線 $x=p$ に関して対称なグラフをもつので，
$f(p+h)=f(p-h)$ が任意の h に対して成り立つ．

ここで $f(p+h)-f(p-h)=(ah^4+b'h^3+c'h^2+d'h+e')-(ah^4-b'h^3+c'h^2-d'h+e')$

$$=2b'h^3+2d'h$$

より $2b'h^3+2d'h=0$ が h に関する恒等式となるので $b'=d'=0$

このとき $f(x)=a(x-p)^4+c'(x-p)^2+e'$ となるが，$g(x)=ax^2+c'x+e'$，$h(x)=(x-p)^2$ とおくと，$g(x)$ と $h(x)$ は 2 次関数で，$f(x)=g(h(x))$ と表すことができる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 42 講　偶関数，奇関数，対称移動

42　曲線 $y=f(x)$ を直線 $y=x+1$ に関して対称移動した曲線の方程式を求めよ．

【選択肢】

㋐　$x+1=f(y+1)$　　㋑　$x+1=f(y-1)$　　㋒　$x-1=f(y-1)$

【答】　㋑

【解答】

曲線 $y=f(x)$ 上の点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ として，直線 $y=x+1$ に関してこの点を対称移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，直線 $y=x+1$ の傾きは 1 より，直線 PQ は y 軸に平行にはならないので，直線 PQ の傾きを m とすると，$m\times1=-1$ より $m=-1$

よって $\dfrac{Y-q}{X-p}=-1$　ゆえに

$$p+q=X+Y \quad \cdots\cdots①$$

また P と Q の中点 $\left(\dfrac{X+p}{2},\ \dfrac{Y+q}{2}\right)$ が直線 $y=x+1$ 上より $\dfrac{Y+q}{2}=\dfrac{X+p}{2}+1$

ゆえに

$$p-q=-X+Y-2 \quad \cdots\cdots②$$

$\mathrm{P}(p,\ q)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点より $q=f(p)$ を満たすが，この式に①と②より得られた $p=Y-1$，$q=X+1$ を代入すると $X+1=f(Y-1)$

よって求める曲線の方程式は $\boldsymbol{x+1=f(y-1)}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。